UNIVERSITE HASSAN II DE CASABLANCA

FACULTE DES SCIENCES JURIDIQUES
ECONOMIQUES ET SOCIALES CASABLANCA
Année Universitaire 2019-2020

CALCUL DES PROBABILITES
ENS : 1

EVENEMENTS LIES A UNE EXPERIENCE ALEATOIRE

I OBJECTIFS

Comme en mathématiques où les nombres réels sont structurés par l'addition, par la multiplication qui sont des lois qui permettent de composer des nombres entre eux, en théorie des probabilités les événements liés à une expérience aléatoire sont structurés par les opérations union, intersection, complémentarité. Ces lois sont héritées de la théorie des ensembles, elles permettent de définir des axiomes et de développer la théorie des probabilités.

II L'ESSENTIEL A SAVOIR

A. Expérience aléatoire ou épreuve.

Une expérience est aléatoire lorsqu'il n'est pas possible de prévoir le résultat de l'expérience, c'est-à-dire que l'on peut prédire, tout au plus, un ensemble de résultats possibles, d'événements. Une épreuve est une autre façon de désigner une expérience aléatoire.

Exemple 1

Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé à six faces numérotées de 1 à 6. Le résultat est le nombre de points obtenus sur la face supérieure du dé. Si l'expérience est répétée plusieurs fois, le résultat change de manière aléatoire.

Un dé jeté conduira à un des nombres appartenant à l'ensemble A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Exemple 2

Lorsqu'une pièce de monnaie est lancée, cette expérience conduit au résultats, ***pile***, noté *P*(ou 0), soit au résultat ***face***, noté *F* (ou 1), c'est-à-dire à l'un des éléments de l'ensemble B = {*P* , *F*} (ou B = {1 ,0}).

Exemple 3
Si nous lançons une pièce de monnaie deux fois, les résultats seront les éléments d'un ensemble C = {*PP* , *PF* , *FP* , *FF*}.

Ensemble fondamental Ω

L'ensemble de tous les résultats possibles(les éventualités ou les issues) d'une expérience aléatoire est appelé ensemble fondamental qu'on notera en général par **Ω**.

Exemple 1
Dans le cas de jet d'un dé à six faces numérotées l'ensemble de tous les résultats possibles est donné par : **Ω** = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Exemple 2
On lance une de monnaie trois fois de suite. Une éventualité peut être décrite par la suite des résultats de chaque lancé. Dans ce cas, l'ensemble fondamental est :

$$\Omega = \{PPP , PPF , PFP , PFF , FPP , FPF , FFP , FFF \}$$

Exemple 3
On tire une boule dans une urne contenant une boule noire, deux blanches et cinq rouges et l'ensemble fondamental retenu est
Ω = {noire, blanche, rouge} .

B. Evénement

Rappel : Parties d'un ensemble

-Définition

Si A est inclus dans E on dit que A est une 'partie' de E.
Toutes les parties de E sont elles-mêmes les éléments d'un nouvel ensemble appelé 'ensemble des parties de E' et noté $\mathcal{P}(E)$.

$$A \subseteq E \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E)$$

-Exemple : Si $E = \{a, b, c\}$, les parties de E sont :

$$\emptyset \ , \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a , b\} , \{a , c\} , \{b , c\} , \{a , b , c\}$$

alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset \ , \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a , b\} , \{a , c\} , \{b , c\} , \{a , b , c\}\}$

-Propriétés

-$\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide car l'ensemble vide $\emptyset$ et E sont toujours des parties de E :

$$\emptyset \in \mathcal{P}(E) \text{ et } E \in \mathcal{P}(E)$$

-Si E est un ensemble à n éléments, alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et a 2^n éléments.

. Evénement liés à une expérience aléatoire

Un événement est lié à une expérience aléatoire si lorsque cette expérience a été faite, il est possible de dire si cet événement est réalisé ou non.

Un événement est donc un sous-ensemble A de l'ensemble fondamental **Ω**, c'est-à-dire qu'il est un ensemble des résultats possibles.

Exemple
Reprenons l'expérience qui à lancer un dé. Obtenir un chiffre pair, obtenir un chiffre impair, obtenir le chiffre 2, sont des événements liés à cette expérience aléatoire.

Remarque
À l'expérience du jet de dé on associe **Ω** = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ; l'événement A = {1, 2} traduit, c'est-à-dire représente symboliquement, le résultat « obtenir un résultat inférieur ou égal à 2 ».

Evénement élémentaires ω
un **événement** élémentaire est un événement qui ne fait intervenir qu'un seul résultat de l'expérience.

.

.Evénement certain Ω
C'est l'événement qui se réalise toujours, il est appelé événement certain.

.Cardinal de Ω
Ω peut être fini, cardinal de **Ω** est le nombre d'éléments de **Ω**.
Ω peut être infini.

.Ensemble des parties de Ω : $\mathcal{P}$(Ω)
L'ensemble des parties de **Ω**, ou encore l'ensemble des sous ensemble de **Ω** constitue l'ensemble des événements liés à l'expérience aléatoire.
Les parties de l'ensemble fondamental **Ω** constituent un ensemble que l'on notera α, c'est-à-dire α **=** $\mathcal{P}$(**Ω**)

.Evénement impossible ∅

Un événement qui ne se réalise lamais est appelé événement impossible et il est noté ∅**,** c'est le symbole de l'ensemble vide utilisé dans la théorie des ensembles.

L'événement ∅ appartient à $\mathcal{P}(\mathbf{\Omega})$. C'est un sous-ensemble de $\mathbf{\Omega}$**.** Sa définition est indispensable pour dénombrer tous les éléments de $\mathcal{P}(\mathbf{\Omega})$.

La probabilité de l'événement impossible est nulle.

Exemple :

Pour le jet d'un dé, le nombre des sous-ensembles est égal à $2^6 = 64$.

- Il y a $C_6^0 = 1$ sous-ensemble à 0 éléments ∅
- Il y a $C_6^1 = 6$ sous-ensembles à 1 élément : {1}, … ,{6}
- Il y a $C_6^2 = 15$ sous-ensembles à 2 éléments : {1,2}, … ,{4,6}
- Il y a $C_6^3 = 20$ sous-ensembles à 3 éléments : {1,2,3}, … ,{4,6,3}
- Il y a $C_6^4 = 15$ sous-ensembles à 4 éléments : {1,2,3,4}, … ,{4,6,3,5}
- Il y a $C_6^5 = 6$ sous-ensembles à 5 éléments : {1,2,3,4,5}, … ,{2,4,6,3,5}
- Il y a $C_6^6 = 1$ sous-ensemble à 6 éléments : {1,2,3,4,5,6}

Il y a donc 64 événements associés à l'ensemble fondamental $\mathbf{\Omega}$.

Parmi ceux-ci :

- L'événement certain est $\mathbf{\Omega}$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6} : « on obtient 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6 »
- L'événement A = {2,4} : « on obtient 2 ou 4 »

C. Opérations sur les événements

Exemple :

Obtenir un chiffre pair en lançant un dé est un élément de $\alpha = \mathcal{P}(\mathbf{\Omega})$

Implication ⊂

A implique B, noté A ⊂ B, si la réalisation de l'événement A entraîne la réalisation de B.

Exemple :

Reprenons l'expérience qui consiste à lancer un dé.

L'événement A est « obtenir le chiffre 2 »

A = {2}

L’événement B est « obtenir un chiffre pair »

$B = \{2,4,6\}$

Si A est réalisé, B l’est aussi : $A \subset B$

.Union $\cup$

A union B, noté $A \cup B$, est l’événement C qui se réalise si l’un au moins des événements A ou B se réalise. $C = A \cup B$.

Exemple

Reprenons l’expérience qui consiste à lancer un dé.

L’événement A est « obtenir 1 ou 3 »

$A = \{1,3\}$

L’événement B est « obtenir 1 ou 2 ou 5 »

$B = \{1,2,5\}$

$C = A \cup B$ est l’événement «obtenir 1 ou 2 ou 3 ou 5 »

$C = \{1,2,3,5\}$

Remarque

L’union se généralise à un nombre quelconque d’événements :

$$C = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_i \ldots \cup A_n$$

C est l’événement qui se réalise si au moins l’un des A_i se réalise**.**

Intersection $\cap$

A inter B qui est noté $A \cap B$ est l’événement C qui se réalise si A et B se réalise simultanément. $C = A \cap B$

Exemple

Reprenons l’expérience qui consiste à lancer un dé.

A est l’événement « obtenir 2 ou 3 ou 4 ou 5 »

$A = \{2,3,4,5\}$

B est l’événement « obtenir 3 ou 4 ou 6 »

$B = \{3,4,6\}$

$C = A \cap B$ est l’événement « obtenir 3 ou 4 »

$C = \{3,4\}$

Remarque

L’intersection se généralise à plus de deux événements :

$$C = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_i \dots \cap A_n$$

C est l'événement qui se réalise si tous les A_i se réalisent simultanément.

.**Evénements incompatibles** : $A \cap B = \emptyset$

Deux événements A et B sont incompatibles si leur intersection est l'événement impossible : $A \cap B = \emptyset$

Exemple

L'événement A = {2,6} est incompatible avec B = {1,3} : on ne peut obtenir (1 ou 3) et (2 ou 6) !

Complémentarité : événement contraire ou complémentaire de A.

L'événement contraire ou complémentaire d'un événement A est l'événement qui se réalise si A ne se réalise pas. Il est noté $\overline{A}$.

Exemple

Reprenons l'expérience qui consiste à lancer un dé.

Si l'événement A est obtenir un chiffre pair, $\overline{A}$ est l'événement obtenir un chiffre impair.

Si l'événement A est obtenir le 1 ou le 3, l'événement $\overline{A}$ est obtenir le 2 ou le 4 ou le 5 ou le 6.

III Compléments

A. Ensemble fondamental **Ω constitué d'une infinité d'éléments.**

L'ensemble fondamental Ω peut être constitué d'une infinité dénombrable ou non dénombrable d'éléments.

Exemple

Infinité discrète et dénombrable

Considérons l'expérience qui consiste à lancer une pièce de monnaie dont un côté est pile et l'autre est face. L'expérience est répétée autant de fois qu'il nécessaire pour obtenir la première fois le côté face. L'ensemble Ω est constitué du nombre de lancers nécessaire pour obtenir ce résultat.

$$\Omega = \{1, 2, \dots, k, \dots, n, n+1, \dots\}$$

Ω est l'ensemble des nombres entiers. Il s'agit d'une infinité dénombrable.

Infinité continue non dénombrable et dénombrable

Considérons l'expérience qui consiste à se rendre par la route d'une ville à l'autre, l'événement élémentaire ou le résultat associé à cette expérience est le temps de trajet. Ce temps est aléatoire. Il dépend des conditions. Admettons qu'il soit compris entre 75 minutes et 130 minutes.

$$\boldsymbol{\Omega} = \{75,130\}$$

B. Notions de tribu ou σ-algèbre.

Nous avons observé que si A et B sont des parties de $\boldsymbol{\Omega}$, alors $\overline{\mathrm{A}}$ et $A \cup B$ sont aussi des parties de $\boldsymbol{\Omega}$. Plus généralement pour un ensemble α de parties de Ω on considère les propriétés suivantes :

-Propriété 1 : α est fermé par rapport à la complémentation, ce qui veut dire: si $A \in \alpha$ alors $\overline{\mathrm{A}} \in \alpha$.

-Propriété 2 : α est fermée par rapport à l'union finie. Ceci veut dire : si $A_1 \in \alpha$, $A_2 \in \alpha$, … , $A_i \in \alpha$, … , $A_n \in \alpha$ alors $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_i \cup \ldots \cup A_n = \cup_{1\leq i\leq n} A_i \in \alpha$

-Propriétés 3 : α est fermé par rapport à l'union infinie dénombrable. Si pour $i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \alpha$ alors $\cup_i A_i \in \alpha$.

Une famille α de parties de $\boldsymbol{\Omega}$ munie des propriétés 1 et 2 est une algèbre de Boole.

Une famille α de parties de $\boldsymbol{\Omega}$ munie des propriétés 1 et 3 est une tribu ou σ-algèbre.

C. Propriétés des opérations « union », « intersection », « complémentaire »

Il faut savoir que les opérations union et intersection sont commutatives :

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Ces opérations sont **associatives** :

$$A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Les **lois de Morgan** sont aussi très utiles dans les applications :

$$\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Les opérations union et intersection sont **distributives** l'une par rapport à l'autre :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Exercices

Enoncé1

Soient A, B et C trois événements d'un ensemble fondamental $\boldsymbol{\Omega}$**.** Calculer l'événement $[A \cap (B \cup C)] \cup [A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})]$

Enoncé 2

On lance un dé deux fois de suite. On note x le résultat du premier lancé et y celui du second. A cette expérience aléatoire, on associe l'ensemble fondamental constitué de tous les couples (x,y) possibles :

$$\boldsymbol{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2, 1 \le x \le 6 \; et \; 1 \le y \le 6\}.$$

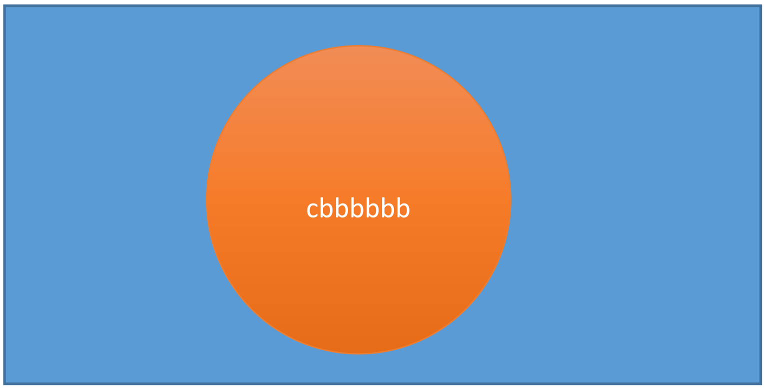
1.Donner la liste des éventualités constituant les trois événements suivants :

$A = \{ (x,y) \in \Omega, x+y \geq 8\}$

$B = \{ (x,y) \in \Omega, \; xy \leq 6\}$

$C = \{ (x,y) \in \Omega, \; y = 2x\}$

2-Quel est l'événement $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$?



A